

ΜΑΘΗΜΑ 25

2.2 – 2.3 ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ – ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Εφαπτομένη ευθεία

Παράγωγος βασικών συναρτήσεων

ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

Αθροίσματος – γινομένου - πηλίκου

Θεωρία – Σχόλια – Μέθοδοι – Ασκήσεις

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο $x_0 \in D_f$

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

2.

Ορισμός

Συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε σύνολο A , όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x \in A$.

3.

Ορισμός

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$

Κάθε $x \in A$ το αντιστοιχίζουμε στον αριθμό $f'(x)$.

Έτσι ορίζεται νέα συνάρτηση $f': A \rightarrow \mathbb{R}$ που λέγεται παράγωγος (συνάρτηση) της f .

4.

Η δεύτερη παράγωγος

Η παράγωγος της παραγώγου συνάρτησης f λέγεται 2^η παράγωγος της f και συμβολίζεται f'' .

Διαδοχικά μπορούμε να μιλάμε για n -οστή παράγωγο της f , που συμβολίζεται $f^{(n)}$ και είναι $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$, $n \geq 3$.

5.

Πίνακας παραγώγισης

- $(c)' = 0$ στο $\mathbb{R}$
- $(x)' = 1$ στο $\mathbb{R}$
- $(x^2)' = 2x$, $(x^3)' = 3x^2$, $(x^4)' = 4x^3$, . . . , $(x^v)' = vx^{v-1}$ στο $\mathbb{R}$
- $(x^{-1})' = -1x^{-1-1}$, $(x^{-2})' = -2x^{-2-1}$, . . . , $(x^{-v})' = -vx^{-v-1}$ στο $\mathbb{R}^*$
- $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ στο $\mathbb{R}^*$
- $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ στο $(0, +\infty)$
- $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ στο $(0, +\infty)$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$ σταθερός.
* Όταν $\alpha > 1$, τότε $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ στο $[0, +\infty)$
- $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$ στο $\mathbb{R}$
- $(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$ στο $\mathbb{R}$
- $(\epsilon\phi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ στο $\mathbb{R}$ με $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$
- $(\sigma\phi x)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$ στο $\mathbb{R}$ με $\eta\mu x \neq 0$
- $(e^x)' = e^x$ στο $\mathbb{R}$
- $(\alpha^x)' = \alpha^x \ln \alpha$ στο $\mathbb{R}$, όπου $\alpha > 0$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ στο $(0, +\infty)$
- $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$ στο $\mathbb{R}^*$
- Αν f, g παραγωγίσιμες σε διάστημα Δ , τότε

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$(cf(x))' = cf'(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \quad \text{με } g(x) \neq 0$$

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2} \quad \text{με } g(x) \neq 0$$

- Αν g παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ και f παραγωγίσιμη στο $g(\Delta)$, τότε
 $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

ΣΧΟΛΙΑ - ΜΕΘΟΔΟΙ

1.

Τρόπος εργασίας

Για να έχουμε την παράγωγο συνάρτησης f σε σημείο x_0 :

- Όταν δεν γνωρίζουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη, εφαρμόζουμε τον ορισμό

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- Όταν γνωρίζουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη, βρίσκουμε την f' και όπου x θέτουμε x_0 ,

2.

Κάτι προφανές

Αν f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις σε σύνολο A και $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in A$, τότε $f'(x) = g'(x)$ για κάθε $x \in A$.

Προσοχή, όχι αντίστροφα.

Προσοχή, όχι για ανίσωση.

3.

Διευκρίνιση

Τα σύμβολα $f'(x)$ και $(f(x))'$ είναι ταυτόσημα. Και τα δύο συμβολίζουν την παράγωγο συνάρτηση της f .

Όμως, δε συμβαίνει το ίδιο για τα σύμβολα $f'(x_0)$ και $(f(x_0))'$.

- Το $f'(x_0)$ συμβολίζει την τιμή της παραγώγου της f στο σημείο x_0 .
- Το $(f(x_0))'$ είναι 0, αφού πρόκειται για την παράγωγο του σταθερού αριθμού $f(x_0)$.

4.

Διευκρίνιση

Μη μπερδεύουμε την παράγωγο συνάρτηση $f'(x)$ συνάρτησης f , με την παράγωγο $f'(x)$ της f σε κάποιο σημείο x .

Η πρώτη είναι συνάρτηση και η δεύτερη είναι αριθμός.

Απλά, έχουν ίδιο συμβολισμό $f'(x)$.

Για τη διάκρισή τους, μπορούμε την πρώτη να τη συμβολίζουμε $(f(x))'$

5.

Προσοχή

Αν f παραγωγίσιμη σε σύνολο A , δεν συμπεραίνεται ότι η $|f|$ είναι παραγωγίσιμη στο A .

Πρώτα απαλασσόμαστε από το απόλυτο

6.

Προσοχή

Αν f παραγωγίσιμη σε σύνολο A , δεν συμπεραίνεται ότι η $\sqrt{f}$ είναι παραγωγίσιμη στο A .

7.

Θυμίζουμε ότι

Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ έχει πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$

Αλλά παραγωγίζεται στο $(0, +\infty)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Στους κανόνες παραγωγίσισης

1.

Δίνεται συνάρτηση f άρτια και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Αν $f(0) = 1$ και $g(x) = (x^2 + x + 1)f(x) + 2\sin x$, $x \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι $g'(0) = 1$

Προτεινόμενη λύση

Η συνάρτηση g προκύπτει από πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$, άρα είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

$$g'(x) = (2x + 1)f(x) + (x^2 + x + 1)f'(x) - 2\eta\mu x$$

$$g'(0) = (2 \cdot 0 + 1)f(0) + (0^2 + 0 + 1)f'(0) - 2\eta\mu 0$$

$$g'(0) = f(0) + f'(0)$$

$$g'(0) = 1 + f'(0) \quad (1)$$

f άρτια $\Rightarrow f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$(f(-x))' = f'(x)$$

$$f'(-x)(-x)' = f'(x)$$

$$f'(-x)(-1) = f'(x)$$

Για $x = 0$ έχουμε $f'(0)(-1) = f'(0) \Rightarrow -f'(0) = f'(0)$

$$0 = 2f'(0)$$

$$f'(0) = 0$$

$$(1) \Rightarrow g'(0) = 1$$

2.

Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει $f(\ln x) = e^x - \ln x$, να αποδείξετε ότι $e^2 f''(-1) = (1 + e) e^{\frac{1}{e}}$

Προτεινόμενη λύση

$$f(\ln x) = e^x - \ln x \Rightarrow (f(\ln x))' = (e^x - \ln x)'$$

$$f'(\ln x)(\ln x)' = e^x - \frac{1}{x}$$

$$f'(\ln x) \frac{1}{x} = e^x - \frac{1}{x}$$

$$f'(\ln x) = x e^x - 1$$

$$(f'(\ln x))' = (x e^x - 1)'$$

$$f''(\ln x)(\ln x)' = e^x + x e^x$$

$$f''(\ln x) \frac{1}{x} = e^x + x e^x$$

$$f''(\ln x) = x e^x + x^2 e^x$$

$$f''(\ln x) = e^x (x + x^2)$$

Για $x = \frac{1}{e}$ παίρνουμε $f''\left(\ln \frac{1}{e}\right) = e^{\frac{1}{e}} \left(\frac{1}{e} + \frac{1}{e^2}\right)$

$$f''(-1) = e^{\frac{1}{e}} \frac{e+1}{e^2} \Rightarrow e^2 f''(-1) = e^{\frac{1}{e}} (e+1)$$

3.

Συνάρτηση ω είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $\omega(-1) = 3$.

Για συνάρτηση f δίνεται $f(x) = (x-2)^2 \cdot \omega(2x-5)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε την $f''(2)$.

Προτεινόμενη λύση

Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, σα γινόμενο δύο φορές παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

$$\begin{aligned} \text{Είναι δε } f'(x) &= [(x-2)^2]' \omega(2x-5) + (x-2)^2 [\omega(2x-5)]' \\ &= 2(x-2) \cdot \omega(2x-5) + (x-2)^2 \cdot \omega'(2x-5) \cdot 2 \\ &= 2[(x-2) \cdot \omega(2x-5) + (x-2)^2 \cdot \omega'(2x-5)] \\ f''(x) &= 2[(x-2) \cdot \omega(2x-5)]' + [(x-2)^2 \cdot \omega'(2x-5)]' \\ f''(x) &= 2[\omega(2x-5) + (x-2) \cdot \omega'(2x-5) \cdot 2 + \\ &\quad + 2(x-2) \cdot \omega'(2x-5) + (x-2)^2 \cdot \omega''(2x-5) \cdot 2] \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } f''(2) = 2[\omega(-1) + 0 + 0 + 0] = 2 \cdot 3 = 6$$

4.

Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ισχύει $f(x^3) = 3x^7$, να υπολογίσετε την $f''(8)$.

Προτεινόμενη λύση

$$\begin{aligned} f(x^3) = 3x^7 &\Rightarrow [f(x^3)]' = (3x^7)' \\ f'(x^3) \cdot 3x^2 &= 21x^6 \text{ και αν } x \neq 0 \\ f'(x^3) &= 7x^4 \Rightarrow [f'(x^3)]' = [7x^4]' \\ f''(x^3) \cdot 3x^2 &= 28x^3 \\ f''(x^3) &= \frac{28}{3}x \end{aligned}$$

$$\text{Για } x=2 \text{ παίρνουμε } f''(2^3) = \frac{28}{3} \cdot 2 \Rightarrow f''(8) = \frac{56}{3}$$

5.

Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(0) = -1$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν $g(x) = f(x^2 - 1)$, $h(x) = f(x^2 - 4x + 3)$, να υπολογίσετε τη διαφορά $g''(1) - h''(3)$.

Προτεινόμενη λύση

$$\begin{aligned} g'(x) &= [f(x^2 - 1)]' = f'(x^2 - 1)(x^2 - 1)' \\ &= f'(x^2 - 1) 2x = 2x \cdot f'(x^2 - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g''(x) &= 2 [x \cdot f'(x^2 - 1)]' = 2 [x' f'(x^2 - 1) + x [f'(x^2 - 1)]'] \\ &= 2 [f'(x^2 - 1) + x f''(x^2 - 1)(x^2 - 1)'] \\ &= 2 [f'(x^2 - 1) + x f''(x^2 - 1) 2x] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Για } x = 1 \text{ παίρνουμε } g''(1) &= 2 [f'(1^2 - 1) + 1 \cdot f''(1^2 - 1) 2 \cdot 1] \\ &= 2 [f'(0) + f''(0) 2] \\ &= 2 [f'(0) + (-1) 2] \\ &= 2 f'(0) - 4 \quad \textbf{(1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h'(x) &= [f(x^2 - 4x + 3)]' = f'(x^2 - 4x + 3)(x^2 - 4x + 3)' \\ &= f'(x^2 - 4x + 3)(2x - 4) \\ &= 2 f'(x^2 - 4x + 3)(x - 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h''(x) &= 2 [f'(x^2 - 4x + 3)(x - 2)]' \\ &= 2 [[f'(x^2 - 4x + 3)]' (x - 2) + f'(x^2 - 4x + 3)(x - 2)'] \\ &= 2 [f''(x^2 - 4x + 3)(x^2 - 4x + 3)' (x - 2) + f'(x^2 - 4x + 3)] \\ &= 2 [f''(x^2 - 4x + 3)(2x - 4)(x - 2) + f'(x^2 - 4x + 3)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Για } x = 3, \quad h''(3) &= 2 [f''(3^2 - 4 \cdot 3 + 3)(2 \cdot 3 - 4)(3 - 2) + f'(3^2 - 4 \cdot 3 + 3)] \\ &= 2 [f''(0) \cdot 2 + f'(0)] \\ &= 2 [(-1) \cdot 2 + f'(0)] \\ &= -4 + 2 f'(0) \quad \textbf{(2)} \end{aligned}$$

$$\text{Από τις (1), (2)} \Rightarrow g''(1) - h''(3) = 0$$

6.

Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow (0,1)$ έχει παράγωγο 4ης τάξης και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $[f(x)]^2 + [f'(x)]^2 = 1$, να αποδείξετε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f^{(4)}(x) = f(x)$

Προτεινόμενη λύση

$$\begin{aligned}
 [f(x)]^2 + [f'(x)]^2 = 1 &\Rightarrow [[f(x)]^2 + [f'(x)]^2]' = 0 \\
 2f(x)f'(x) + 2f'(x)f''(x) &= 0 \\
 2f'(x)f''(x) &= -2f(x)f'(x) \\
 f'(x)f''(x) &= -f(x)f'(x) \quad (1)
 \end{aligned}$$

Είναι $f'(x) \neq 0$ διότι, αν για κάποιο x ήταν $f'(x) = 0$, η υπόθεση $[f(x)]^2 + [f'(x)]^2 = 1$ θα έδινε $[f(x)]^2 = 1$

$f(x) = 1$ ή $f(x) = -1$
που είναι άτοπο αφού $f(x) \in (0,1)$.

$$\begin{aligned}
 (1) &\Rightarrow f''(x) = -f(x) \quad (2) \\
 f^{(3)}(x) &= -f'(x) \\
 f^{(4)}(x) &= -f''(x) \stackrel{(2)}{=} -(-f(x)) = f(x)
 \end{aligned}$$

7.

Θεωρούμε συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ τέτοια, ώστε

$$f(x) f'\left(\frac{1}{x}\right) = x \quad \text{για κάθε } x > 0.$$

i) Να αποδείξετε ότι $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x f'(x)}$ για κάθε $x > 0$

ii) Θεωρούμε συνάρτηση g τέτοια, ώστε $g(x) = f(x) f\left(\frac{1}{x}\right)$, $x > 0$.

Να αποδείξετε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ότι

$$g'(x) = 0 \quad \text{για κάθε } x > 0$$

Προτεινόμενη λύση

i)

Στην ισότητα $f(x) f'\left(\frac{1}{x}\right) = x$ **(1)**, όπου x θέτουμε $\frac{1}{u}$.

$$f\left(\frac{1}{u}\right) f'(u) = \frac{1}{u} \neq 0 \Rightarrow f'(u) \neq 0 \quad \text{και} \quad f\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{1}{u f'(u)}$$

Τέλος, όπου u θέτουμε x , οπότε $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x f'(x)}$ **(2)**

ii)

Η συνάρτηση $\omega(x) = \frac{1}{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και η f είναι

παραγωγίσιμη στο $D_\omega = (0, +\infty)$, άρα και η $f\left(\frac{1}{x}\right)$ είναι παραγωγίσιμη στο

$D_\omega = (0, +\infty)$, άρα και το γινόμενο $f(x) f\left(\frac{1}{x}\right)$, δηλαδή η g .

$$\begin{aligned} \text{Θα είναι δε} \quad g'(x) &= \left(f(x) \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) \right)' \\ &= f'(x) f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) \left(f\left(\frac{1}{x}\right) \right)' \\ &= f'(x) f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) f'\left(\frac{1}{x}\right) \left(\frac{1}{x} \right)' \\ &= f'(x) f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) f'\left(\frac{1}{x}\right) \left(-\frac{1}{x^2} \right) \quad \textbf{(3)} \end{aligned}$$

Αλλά (2) $\Rightarrow f'(x) f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}$

και από την (1) έχουμε $f(x) f'\left(\frac{1}{x}\right) = x$

Οπότε η (3) $\Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x} + x \left(-\frac{1}{x^2} \right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0$

8.

Για παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f δίνεται ότι $e^{f(x)} + f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

$$\text{και ότι } f''(x) = -\frac{e^{f(x)}}{(e^{f(x)}+1)^3}$$

Προτεινόμενη λύση

$$f \text{ παραγωγίσιμη} \Rightarrow e^{f(x)} \text{ παραγωγίσιμη} \Rightarrow e^{f(x)} + f(x) \text{ παραγωγίσιμη}$$

$$e^{f(x)} + f(x) = x \Rightarrow (e^{f(x)} + f(x))' = x'$$

$$(e^{f(x)})' + f'(x) = 1$$

$$e^{f(x)} f'(x) + f'(x) = 1$$

$$f'(x) (e^{f(x)} + 1) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{e^{f(x)}+1} \quad (1)$$

$$e^{f(x)} + 1 \text{ παραγωγίσιμη} \Rightarrow \frac{1}{e^{f(x)}+1} \text{ παραγωγίσιμη}$$

$$(1) \Rightarrow f''(x) = -\frac{(e^{f(x)}+1)'}{(e^{f(x)}+1)^2} = -\frac{e^{f(x)}f'(x)}{(e^{f(x)}+1)^2} \stackrel{(1)}{=} -\frac{e^{f(x)}}{(e^{f(x)}+1)^3}$$

9.

Συνάρτηση ω είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Για συνάρτηση f δίνεται

$$f(x) = (x^2 + 1)\omega(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Αν $\omega(1) = -5$ και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\omega'(x) - 2}{x - 1} = 4$, να δείξετε ότι η f είναι δύο φορές

παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε την τιμή $f''(1)$.

Προτεινόμενη λύση

Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, σα γινόμενο δύο φορές παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

$$\text{Είναι δε } f'(x) = 2x\omega(x) + (x^2 + 1)\omega'(x)$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= [2x\omega(x)]' + [(x^2 + 1)\omega'(x)]' \\ &= 2[\omega(x) + x\omega'(x)] + 2x\omega'(x) + (x^2 + 1)\omega''(x) \\ &= 2\omega(x) + 2x\omega'(x) + 2x\omega'(x) + (x^2 + 1)\omega''(x) \\ &= 2\omega(x) + 4x\omega'(x) + (x^2 + 1)\omega''(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } f''(1) &= 2\omega(1) + 4 \cdot 1 \omega'(1) + (1^2 + 1)\omega''(1) \\ &= 2 \cdot (-5) + 4\omega'(1) + 2\omega''(1) \quad (1) \end{aligned}$$

Θα υπολογίσουμε τις $\omega'(1)$ και $\omega''(1)$

$$\text{Δίνεται ότι } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\omega'(x) - 2}{x - 1} = 4 \quad (2)$$

$$\text{Θέτουμε } g(x) = \frac{\omega'(x) - 2}{x - 1}.$$

$$\text{Τότε } \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 4 \text{ και } g(x)(x - 1) = \omega'(x) - 2$$

$$\text{Οπότε } \omega'(x) = g(x)(x - 1) + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \omega'(x) = \lim_{x \rightarrow 1} [g(x)(x - 1) + 2]$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \omega'(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \omega'(x) = 4 \cdot 0 + 2 = 2 \quad (3)$$

Επειδή, όμως, η συνάρτηση ω' είναι παραγωγίσιμη, είναι και συνεχής, άρα

$$\lim_{x \rightarrow 1} \omega'(x) = \omega'(1) \stackrel{(3)}{\Rightarrow} \omega'(1) = 2$$

$$(2) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\omega'(x) - \omega'(1)}{x - 1} = 4 \Rightarrow \omega''(1) = 4$$

$$(1) \Rightarrow f''(1) = -10 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 4 = -10 + 8 + 8 = 6$$

10.

Έστω το πολυώνυμο $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με ρίζες $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \in \mathbb{R}$

διαφορετικές μεταξύ τους. Να αποδείξετε ότι :

$$\text{i)} \quad \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-\rho_1} + \frac{1}{x-\rho_2} + \frac{1}{x-\rho_3} \quad \text{για κάθε } x \neq \rho_1, \rho_2, \rho_3$$

$$\text{ii)} \quad \frac{\rho_1}{f'(\rho_1)} + \frac{\rho_2}{f'(\rho_2)} + \frac{\rho_3}{f'(\rho_3)} = 0$$

Προτεινόμενη λύση**i)**

Το πολυώνυμο γράφεται $f(x) = (x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3)$ **(1)**. Άρα

$$f'(x) = (x-\rho_1)'(x-\rho_2)(x-\rho_3) + (x-\rho_1)(x-\rho_2)'(x-\rho_3) + (x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3)'$$

$$f'(x) = (x-\rho_2)(x-\rho_3) + (x-\rho_1)(x-\rho_3) + (x-\rho_1)(x-\rho_2) \quad \textbf{(2)}$$

$$\begin{aligned} \text{Για κάθε } x \neq \rho_1, \rho_2, \rho_3 \text{ η (2)} \Rightarrow f'(x) &= \frac{f(x)}{x-\rho_1} + \frac{f(x)}{x-\rho_2} + \frac{f(x)}{x-\rho_3} \\ \frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{1}{x-\rho_1} + \frac{1}{x-\rho_2} + \frac{1}{x-\rho_3} \end{aligned}$$

ii)

$$\text{Για } x = \rho_1, \text{ η (2)} \Rightarrow f'(\rho_1) = (\rho_1 - \rho_2)(\rho_1 - \rho_3) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho_1}{f'(\rho_1)} &= \frac{\rho_1}{(\rho_1 - \rho_2)(\rho_1 - \rho_3)} \\ &= \frac{\rho_1(\rho_2 - \rho_3)}{(\rho_1 - \rho_2)(\rho_1 - \rho_3)(\rho_2 - \rho_3)} \\ &= \frac{-\rho_1(\rho_2 - \rho_3)}{(\rho_1 - \rho_2)(\rho_2 - \rho_3)(\rho_3 - \rho_1)} \\ &= \frac{-\rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3}{(\rho_1 - \rho_2)(\rho_2 - \rho_3)(\rho_3 - \rho_1)} \end{aligned}$$

$$\text{Γράφουμε κυκλικά και προσθέτουμε, οπότε} \quad \frac{\rho_1}{f'(\rho_1)} + \frac{\rho_2}{f'(\rho_2)} + \frac{\rho_3}{f'(\rho_3)} = 0$$

11.

Έστω το πολυώνυμο $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με ρίζες $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \in \mathbb{R}^*$

Να αποδείξετε ότι :

$$\text{i)} \quad \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_3} = -\frac{f'(0)}{f(0)} = -\frac{\beta}{\gamma}$$

$$\text{ii)} \quad \frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} + \frac{1}{\rho_3^2} = \left[\frac{f'(0)}{f(0)} \right]^2 - \frac{f''(0)}{f(0)}$$

Προτεινόμενη λύση

i)

Το πολυώνυμο γράφεται $f(x) = (x - \rho_1)(x - \rho_2)(x - \rho_3)$ **(1)**. Άρα

$$f'(x) = (x - \rho_1)'(x - \rho_2)(x - \rho_3) + (x - \rho_1)(x - \rho_2)'(x - \rho_3) + (x - \rho_1)(x - \rho_2)(x - \rho_3)'$$

$$f'(x) = (x - \rho_2)(x - \rho_3) + (x - \rho_1)(x - \rho_3) + (x - \rho_1)(x - \rho_2) \quad \textbf{(2)}$$

$$\text{Για κάθε } x \neq \rho_1, \rho_2, \rho_3 \text{ η (2)} \Rightarrow f'(x) = \frac{f(x)}{x - \rho_1} + \frac{f(x)}{x - \rho_2} + \frac{f(x)}{x - \rho_3} \quad \textbf{(3)}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x - \rho_1} + \frac{1}{x - \rho_2} + \frac{1}{x - \rho_3} \quad \textbf{(4)}$$

$$\text{Για } x = 0, \text{ η (4)} \Rightarrow \frac{f'(0)}{f(0)} = -\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_3}$$

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_3} = -\frac{f'(0)}{f(0)}$$

$$\text{Είναι } f(0) = 0^3 + \alpha \cdot 0^2 + \beta \cdot 0 + \gamma = \gamma$$

$$f'(x) = (x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma)' = 3x^2 + 2\alpha x + \beta$$

$$\text{Άρα } f'(0) = 3 \cdot 0^2 + 2\alpha \cdot 0 + \beta = \beta$$

$$\text{Επομένως } \frac{f'(0)}{f(0)} = \frac{\beta}{\gamma}$$

ii)

$$(3) \Rightarrow f''(x) = \frac{f'(x)(x - \rho_1) - f(x)}{(x - \rho_1)^2} + \frac{f'(x)(x - \rho_2) - f(x)}{(x - \rho_2)^2} + \frac{f'(x)(x - \rho_3) - f(x)}{(x - \rho_3)^2}$$

$$f''(0) = \frac{f'(0)(-\rho_1) - f(0)}{\rho_1^2} + \frac{f'(0)(-\rho_2) - f(0)}{\rho_2^2} + \frac{f'(0)(-\rho_3) - f(0)}{\rho_3^2}$$

$$f''(0) = -\frac{f'(0)}{\rho_1} - \frac{f(0)}{\rho_1^2} - \frac{f'(0)}{\rho_2} - \frac{f(0)}{\rho_2^2} - \frac{f'(0)}{\rho_3} - \frac{f(0)}{\rho_3^2}$$

$$f''(0) = -f'(0) \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_3} \right) - f(0) \left(\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} + \frac{1}{\rho_3^2} \right) \stackrel{(i)}{\Rightarrow}$$

$$f''(0) = -f'(0) \left(-\frac{f'(0)}{f(0)} \right) - f(0) \left(\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} + \frac{1}{\rho_3^2} \right)$$

$$f(0) \left(\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} + \frac{1}{\rho_3^2} \right) = \frac{[f'(0)]^2}{f(0)} - f''(0)$$

$$\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} + \frac{1}{\rho_3^2} = \frac{[f'(0)]^2}{[f(0)]^2} - \frac{f''(0)}{f(0)}$$

12.

- i) Αν $f(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $v \geq 2$, να αποδείξετε ότι, το $(x-\rho)^2$ είναι παράγοντας του $f(x)$ όταν και μόνο όταν ισχύει $f(\rho) = f'(\rho) = 0$
- ii) Να αποδείξετε ότι, το $(x-1)^2$ είναι παράγοντας του $P(x) = x^{v+1} - (v+1)x + v$, για κάθε $v \in \mathbb{N}^*$.

Προτεινόμενη λύση

i)

Ευθύ

Με υπόθεση $(x-\rho)^2$ παράγοντας του $f(x)$, θα αποδείξουμε $f(\rho) = f'(\rho) = 0$.

$$(x-\rho)^2 \text{ παράγοντας του } f(x) \Rightarrow f(x) = (x-\rho)^2 \cdot \Pi(x) \quad (1)$$

$$\text{Για } x = \rho, \text{ η (1) } \Rightarrow f(\rho) = (\rho-\rho)^2 \cdot \Pi(\rho) = 0$$

$$(1) \Rightarrow f'(x) = [(x-\rho)^2]' \cdot \Pi(x) + (x-\rho)^2 \cdot \Pi'(x)$$

$$f'(x) = 2(x-\rho) \cdot \Pi(x) + (x-\rho)^2 \cdot \Pi'(x) \quad (2)$$

$$\text{Για } x = \rho, \text{ η (2) } \Rightarrow f'(\rho) = 2(\rho-\rho) \cdot \Pi(\rho) + (\rho-\rho)^2 \cdot \Pi'(\rho) = 0$$

Αντίστροφο

Με υπόθεση $f(\rho) = f'(\rho) = 0$, θα αποδείξουμε $(x-\rho)^2$ παράγοντας του $f(x)$.

$$\text{Είναι } f(x) = (x-\rho)^2 \cdot \Pi(x) + \alpha x + \beta \quad (3)$$

$$\text{Για } x = \rho, \text{ η (3) } \Rightarrow f(\rho) = (\rho-\rho)^2 \cdot \Pi(\rho) + \alpha \rho + \beta \Rightarrow 0 = \alpha \rho + \beta \quad (4)$$

$$(3) \Rightarrow f'(x) = [(x-\rho)^2]' \cdot \Pi(x) + (x-\rho)^2 \cdot \Pi'(x) + (\alpha x + \beta)'$$

$$f'(x) = 2(x-\rho) \cdot \Pi(x) + (x-\rho)^2 \cdot \Pi'(x) + \alpha \quad (5)$$

$$\text{Για } x = \rho, \text{ η (5) } \Rightarrow f'(\rho) = 2(\rho-\rho) \cdot \Pi(\rho) + (\rho-\rho)^2 \cdot \Pi'(\rho) + \alpha \Rightarrow 0 = \alpha.$$

$$\text{Η (4) } \Rightarrow 0 = \beta.$$

$$\text{Η (3) } \Rightarrow f(x) = (x-\rho)^2 \cdot \Pi(x), \text{ δηλαδή } (x-\rho)^2 \text{ παράγοντας του } f(x).$$

ii)

$$P(1) = 1^{v+1} - (v+1) \cdot 1 + v = 1 - v - 1 + v = 0$$

$$P'(x) = (v+1)x^v - (v+1) \Rightarrow P'(1) = (v+1) \cdot 1^v - (v+1) = 0$$

Άρα, κατά το (i), το $(x-1)^2$ είναι παράγοντας του $P(x)$

13.

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^{\frac{1}{2}}}$

Προτεινόμενη λύση

$$D_f = [0, +\infty)$$

- Παράγωγος στο τυχαίο $x > 0$. $f'(x) = \frac{\left(x^{\frac{3}{2}}\right)' \left(1+x^{\frac{1}{2}}\right) - x^{\frac{3}{2}} \left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)'}{\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)^2}$

$$= \frac{\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \left(1+x^{\frac{1}{2}}\right) - x^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x}{\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)^2}$$

$$= \frac{3x^{\frac{1}{2}} + 3x - x}{2\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)^2} = \frac{3x^{\frac{1}{2}} + 2x}{2\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)^2}$$
- Παράγωγος στο $x_0 = 0$. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^{\frac{1}{2}}} - 0}{x - 0}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^{\frac{1}{2}}} = \frac{0}{1+0} = 0$$

Στην εφαπτομένη

14.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + x + 3$ και το σημείο $K(0, -1)$. Να βρείτε τις εφαπτόμενες της C_f που άγονται από το K .

Προτεινόμενη λύση

Έστω $\varepsilon: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ η ζητούμενη εφαπτομένη, όπου $A(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής.

$$\begin{aligned} \text{Είναι } f(x_0) &= x_0^2 + x_0 + 3 \\ f'(x) &= 2x + 1, \text{ οπότε } f'(x_0) = 2x_0 + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } \varepsilon: y - (x_0^2 + x_0 + 3) &= (2x_0 + 1)(x - x_0) \\ y &= (2x_0 + 1)x - 2x_0^2 - x_0 + x_0^2 + x_0 + 3 \\ y &= (2x_0 + 1)x - x_0^2 + 3 \quad (1) \end{aligned}$$

Η (ε) διέρχεται από το K , άρα η εξίσωσή της επαληθεύεται από αυτό.

$$\begin{aligned} \text{Άρα } -1 &= (2x_0 + 1) \cdot 0 - x_0^2 + 3 \\ x_0^2 &= 4 \\ x_0 &= 2 \quad \text{ή} \quad x_0 = -2 \end{aligned}$$

Για $x_0 = 2$, η εξίσωση (1) της εφαπτομένης γίνεται $y = 5x - 1$

Για $x_0 = -2$, η εξίσωση (1) της εφαπτομένης γίνεται $y = -3x - 1$

15.

Να βρείτε τις κοινές εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων

$$f(x) = x^2 + 4x + 33, \quad g(x) = -x^2 - 1.$$

Προτεινόμενη λύση

$$f'(x) = 2x + 4$$

Έστω $\varepsilon: y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$ η εφαπτομένη της C_f στο τυχαίο σημείο της $A(x_1, f(x_1))$

$$y - (x_1^2 + 4x_1 + 33) = (2x_1 + 4)(x - x_1)$$

$$y = (2x_1 + 4)x - 2x_1^2 - 4x_1 + x_1^2 + 4x_1 + 33$$

$$y = (2x_1 + 4)x - x_1^2 + 33 \quad (1)$$

$$g'(x) = -2x$$

Έστω $\eta: y - g(x_2) = g'(x_2)(x - x_2)$ η εφαπτομένη της C_g στο τυχαίο σημείο της $B(x_2, g(x_2))$

$$y - (-x_2^2 - 1) = -2x_2(x - x_2)$$

$$y = -2x_2x + 2x_2^2 - x_2^2 - 1$$

$$y = -2x_2x + x_2^2 - 1 \quad (2)$$

Για να έχουμε κοινή εφαπτομένη, πρέπει οι ευθείες (ε) και (η) να συμπίπτουν.

Άρα $2x_1 + 4 = -2x_2$ και $-x_1^2 + 33 = x_2^2 - 1$

$$x_2 = -x_1 - 2 \quad \text{και} \quad -x_1^2 + 33 = (-x_1 - 2)^2 - 1$$

$$\text{και} \quad -x_1^2 + 33 = x_1^2 + 4x_1 + 4 - 1$$

$$\text{και} \quad 2x_1^2 + 4x_1 - 30 = 0$$

$$\text{και} \quad x_1^2 + 2x_1 - 15 = 0$$

$$\Delta = 4 + 60 = 64, \quad x_1 = \frac{-2 \pm 8}{2} = 3 \quad \text{ή} \quad -5$$

- Για $x_1 = 3$, η (1) $\Leftrightarrow y = 10x + 24$ κοινή εφαπτομένη
- Για $x_1 = -5$, η (1) $\Leftrightarrow y = -6x + 8$ κοινή εφαπτομένη

16.

Θεωρούμε παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και συνάρτηση g τέτοια, ώστε $g(x) = f(x^2 + x + 1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η ευθεία $\varepsilon: y = 2x + 3$ εφάπτεται της C_f στο σημείο $A(3, f(3))$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο σημείο $B(1, g(1))$.

Προτεινόμενη λύση

Επειδή το $A(3, f(3))$ ανήκει στην (ε) , θα είναι $f(3) = 2 \cdot 3 + 3 = 9$
και $f'(3) = 2$

Η ζητούμενη εφαπτομένη θα έχει εξίσωση $y - g(1) = g'(1)(x - 1)$ **(1)**

Η υπόθεση $g(x) = f(x^2 + x + 1)$ για $x = 1$ δίνει $g(1) = f(3) = 9$

Η υπόθεση $g(x) = f(x^2 + x + 1) \Rightarrow g'(x) = f'(x^2 + x + 1) \cdot (2x + 1)$

για $x = 1$ παίρνουμε $g'(1) = f'(3) \cdot 3 = 2 \cdot 3 = 6$

(1) $\Leftrightarrow y - 9 = 6(x - 1) \Leftrightarrow y = 6x + 3$

17.

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η $g(x) = f(x) - x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των C_f , C_g στα σημεία $A(x_0, f(x_0))$,

$B(x_0, g(x_0))$ αντίστοιχα, τέμνουν τον άξονα $y'y$ στο ίδιο σημείο.

Προτεινόμενη λύση

$\varepsilon: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$

Για $x = 0$ βρίσκουμε $y - f(x_0) = f'(x_0)(0 - x_0)$

$$y = -x_0 f'(x_0) + f(x_0)$$

Άρα η (ε) τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $K(0, -x_0 f'(x_0) + f(x_0))$

$\eta: y - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0)$ η εφαπτομένη της C_g στο σημείο $B(x_0, g(x_0))$

Για $x = 0$ βρίσκουμε $y - g(x_0) = (0 - x_0)g'(x_0)$

$$y = -x_0 g'(x_0) + g(x_0)$$

Άρα η (η) τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $\Lambda(0, -x_0 g'(x_0) + g(x_0))$

Για να αποδείξουμε ότι $K \equiv \Lambda$, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$-x_0 f'(x_0) + f(x_0) = -x_0 g'(x_0) + g(x_0)$$

Από την υπόθεση $g(x) = f(x) - x$, παίρνουμε $g(x_0) = f(x_0) - x_0$

και $g'(x) = f'(x) - 1$ άρα και $g'(x_0) = f'(x_0) - 1$

Οπότε, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$-x_0 f'(x_0) + f(x_0) = -x_0 [f'(x_0) - 1] + f(x_0) - x_0$$

$$-x_0 f'(x_0) + f(x_0) = -x_0 f'(x_0) + x_0 + f(x_0) - x_0 \text{ που ισχύει.}$$

18.

Για την παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f δίνεται ότι

$$[f(x)]^3 + x[f(x)]^2 + 2x^3 = 4x^4 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$

Προτεινόμενη λύση

Η ζητούμενη εφαπτομένη θα είναι $y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$

Θα υπολογίσουμε τις τιμές $f(1)$, $f'(1)$.

Η υπόθεση $[f(x)]^3 + x[f(x)]^2 + 2x^3 = 4x^4$ για $x = 1$ μας δίνει

$$[f(1)]^3 + 1 \cdot [f(1)]^2 + 2 \cdot 1^3 = 4 \cdot 1^4$$

$$[f(1)]^3 + [f(1)]^2 + 2 = 4$$

$$[f(1)]^3 + [f(1)]^2 - 2 = 0 \quad \text{Θέτουμε } f(1) = \mu$$

$$\mu^3 + \mu^2 - 2 = 0$$

$$\mu^3 + \mu^2 - 1 - 1 = 0$$

$$(\mu - 1)(\mu^2 + \mu + 1) + (\mu - 1)(\mu + 1) = 0$$

$$(\mu - 1)(\mu^2 + \mu + 1 + \mu + 1) = 0$$

$$\mu - 1 = 0 \quad \text{ή} \quad \mu^2 + 2\mu + 2 = 0 \quad (\Delta = 4 - 8 = -4 < 0)$$

$$\mu = 1$$

$$\text{Άρα } f(1) = 1$$

Η υπόθεση $[f(x)]^3 + x[f(x)]^2 + 2x^3 = 4x^4 \Rightarrow$

$$([f(x)]^3 + x[f(x)]^2 + 2x^3)' = (4x^4)'$$

$$3[f(x)]^2 f'(x) + [f(x)]^2 + x \cdot 2f(x) f'(x) + 6x^2 = 16x^3$$

Για $x = 1$ παίρνουμε $3[f(1)]^2 f'(1) + [f(1)]^2 + 2f(1) f'(1) + 6 = 16$

$$3 \cdot 1 \cdot f'(1) + 1 + 2 \cdot 1 \cdot f'(1) + 6 = 16$$

$$5f'(1) = 9 \quad \text{Άρα } f'(1) = \frac{9}{5}$$

Η εφαπτομένη στο $A(1, 1)$ έχει εξίσωση $y - 1 = \frac{9}{5} \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y = \frac{9}{5}x - \frac{4}{5}$

19.

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $x^3 + [f(x)]^3 = xf(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: y = -x + 1$ εφάπτεται στη C_f .

Προτεινόμενη λύση

Τα κοινά σημεία των (ε) , C_f προκύπτουν από τη λύση του συστήματος $\begin{cases} y=f(x) \\ y=-x+1 \end{cases}$

Η υπόθεση $x^3 + [f(x)]^3 = xf(x)$ γίνεται

$$x^3 + y^3 = xy$$

$$x^3 + (-x+1)^3 = x(-x+1)$$

$$x^3 + (1-x)^3 = x(-x+1)$$

$$x^3 + 1 - 3x + 3x^2 - x^3 = -x^2 + x$$

$$4x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$(2x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Από την εξίσωση $y = -x + 1$, για $x = \frac{1}{2}$ βρίσκουμε $y = \frac{1}{2}$

Επομένως, κοινό σημείο των (ε) , C_f είναι το $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο A θα είναι: $y - \frac{1}{2} = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$ (1)

Χρειαζόμαστε την $f'\left(\frac{1}{2}\right)$

Η υπόθεση $x^3 + [f(x)]^3 = xf(x) \Rightarrow [x^3 + [f(x)]^3]' = [xf(x)]'$

$$3x^2 + 3[f(x)]^2 f'(x) = f(x) + xf'(x)$$

για $x = \frac{1}{2}$ παίρνουμε $3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3\left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 f'\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} f'\left(\frac{1}{2}\right)$

$$\frac{3}{4} + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} f'\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{3}{4} + \frac{3}{4} f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} f'\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$3 + 3f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2 + 2f'\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = -1$$

Η (1) γίνεται $y - \frac{1}{2} = -1\left(x - \frac{1}{2}\right)$

$$y - \frac{1}{2} = -x + \frac{1}{2}$$

$$y = -x + 1$$

20.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

Να βρείτε το σημείο της C_f , στο οποίο η εφαπτομένη της ευθεία έχει εξίσωση $y = -2x + 2$

Προτεινόμενη λύση

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 2x - 4$$

Έστω $A(x_0, f(x_0))$ το ζητούμενο σημείο.

Η εφαπτομένη στο A θα είναι $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

$$y - (x_0^2 - 4x_0 + 3) = (2x_0 - 4)(x - x_0)$$

$$y = (2x_0 - 4)x - 2x_0^2 + 4x_0 + x_0^2 - 4x_0 + 3$$

$$y = (2x_0 - 4)x - x_0^2 + 3 \quad (1)$$

Για να συμπίπτει η ευθεία (1) με τη δοσμένη $y = -2x + 2$ πρέπει

$$2x_0 - 4 = -2 \quad \text{και} \quad -x_0^2 + 3 = 2$$

$$2x_0 = 2 \quad \text{και} \quad -x_0^2 = -1$$

$$x_0 = 1 \quad \text{και} \quad x_0^2 = 1 \quad \text{Άρα} \quad x_0 = 1$$

$$f(x_0) = 1 - 4 \cdot 1 + 3 = 0$$

$$\text{Επομένως} \quad A(1, 0)$$

21.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$ με $\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$.

Να βρείτε το α , ώστε η ευθεία $\varepsilon: y = x$ να εφάπτεται της C_f .

Προτεινόμενη λύση

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \alpha^x \ln \alpha$$

$\eta: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ η εφαπτομένη της C_f σε σημείο της $A(x_0, f(x_0))$

$$y - \alpha^{x_0} = \alpha^{x_0} \ln \alpha (x - x_0)$$

$$y = (\alpha^{x_0} \ln \alpha) x - (\alpha^{x_0} \ln \alpha) x_0 + \alpha^{x_0}$$

Για να συμπίπτει η ευθεία (η) με την ευθεία (ε), πρέπει να υπάρξει x_0 ώστε

$$\alpha^{x_0} \ln \alpha = 1 \quad \text{και} \quad -\alpha^{x_0} \ln \alpha x_0 + \alpha^{x_0} = 0$$

$$\text{και} \quad -\ln \alpha x_0 + 1 = 0$$

$$\text{και} \quad -\ln \alpha x_0 = -1$$

$$\text{και} \quad \ln \alpha = \frac{1}{x_0}$$

$$\alpha^{x_0} \frac{1}{x_0} = 1 \quad \text{και} \quad \ln \alpha = \frac{1}{x_0}$$

$$\alpha^{x_0} = x_0 \quad \text{και} \quad \ln \alpha = \frac{1}{x_0}$$

$$\ln \alpha^{x_0} = \ln x_0 \quad \text{και} \quad \ln \alpha = \frac{1}{x_0}$$

$$x_0 \ln \alpha = \ln x_0 \quad \text{και} \quad \ln \alpha = \frac{1}{x_0}$$

$$x_0 \frac{1}{x_0} = \ln x_0 \quad \text{και} \quad \ln \alpha = \frac{1}{x_0}$$

$$1 = \ln x_0 \quad \text{και} \quad \ln \alpha = \frac{1}{x_0}$$

$$x_0 = e \quad \text{και} \quad \ln \alpha = \frac{1}{e}$$

$$x_0 = e \quad \text{και} \quad \alpha = e^{\frac{1}{e}}$$

22.

Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δίνεται ότι $f(f(x)) = x^2 - x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $f'(1) < 0$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$.

Προτεινόμενη λύση

Η ζητούμενη εφαπτομένη θα είναι $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$ **(1)**

Στην υπόθεση $f(f(x)) = x^2 - x + 1$, όπου x θέτουμε 1

$$f(f(1)) = 1^2 - 1 + 1 = 1 \quad \textbf{(2)}$$

Στην υπόθεση $f(f(x)) = x^2 - x + 1$, όπου x θέτουμε $f(x)$

$$f(f(f(x))) = [f(x)]^2 - f(x) + 1$$

όπου x θέτουμε 1 $f(f(f(1))) = [f(1)]^2 - f(1) + 1$

αλλά, από τη (2) $f(f(1)) = 1$, οπότε

$$f(1) = [f(1)]^2 - f(1) + 1$$

$$[f(1)]^2 - 2f(1) + 1 = 0$$

$$[f(1) - 1]^2 = 0 \quad \text{άρα} \quad f(1) = 1 \quad \textbf{(3)}$$

Η υπόθεση $f(f(x)) = x^2 - x + 1 \Rightarrow$

$$[f(f(x))]' = (x^2 - x + 1)'$$

$$f'(f(x)) \cdot f'(x) = 2x - 1, \quad \text{για } x = 1 \text{ παίρνουμε}$$

$$f'(f(1)) \cdot f'(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 \quad \stackrel{(3)}{\Rightarrow}$$

$$f'(1) \cdot f'(1) = 1$$

$$[f'(1)]^2 = 1 \quad \text{και επειδή } f'(1) < 0, \text{ θα είναι } f'(1) = -1$$

$$(1) \Leftrightarrow y - 1 = -1(x - 1) \Leftrightarrow y = -x + 2$$